

Метод поиска оптимального расположения узлов аппроксимации непрерывных функций с учётом нелинейности пространства

Е.В. Конопацкий^{1,A}, Д.И. Кислицын^{2,A}, А.В. Степура^{3,B}, О.В. Котова^{4,C}

^A Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

^B Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

^C Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

¹ ORCID: 0000-0003-4798-7458, e.v.konopatskiy@mail.ru

² ORCID: 0000-0002-0232-9593, kislitsynd@yandex.ru

³ ORCID: 0000-0003-4099-329X, stepuraAV@mgsu.ru

⁴ ORCID: 0009-0004-6292-1080, o.v.kotova@donnasa.ru

Аннотация

Предложен метод поиска оптимальных узлов аппроксимации, реализованный на примере функции Рунге. Метод основан на использовании интерполяционных алгебраических кривых в точечном исчислении и сводится к минимизации целевой функции многих переменных, которая обеспечивает минимальные отклонения аппроксимирующей функции от исходной. Традиционно в процессе интерполяции определяются коэффициенты интерполирующей функции на основе исходных точек, что не даёт возможности обеспечить поиск оптимального расположения узлов интерполяции, поскольку координаты узловых точек необходимы для определения коэффициентов интерполирующей функции. Особенность интерполяционных кривых, реализованных в точечном исчислении, заключается в том, что они получены путём равномерного распределения параметра по числовой оси и сохраняют в точечном уравнении координаты узлов интерполяции, что позволяет поставить и решить задачу оптимального их расположения путём минимизации целевой функции. После реализации по координатного расчёта точечного уравнения интерполяционной кривой итоговый результат аппроксимации исходной функции представляет собой алгебраическую кривую, заданную в параметрическом виде, что позволяет использовать нелинейность пространства для значительного уменьшения степени аппроксимирующей полиномиальной функции. Например, при использовании узлов Чебышева, которые считаются оптимальными для аппроксимации функции Рунге, для достижения качественной аппроксимации необходимо не менее 20 узлов, что приводит к необходимости использования полинома 19-й степени. При этом среднеквадратичная ошибка составляет 0.000111. В то время как для аппроксимации функции Рунге на основе оптимизированного расположения узлов аппроксимации уже при использовании 6 узловых точек среднеквадратичная ошибка составляет всего 0.0000284, что на порядок ниже по сравнению с узлами Чебышева и позволяет вместо одного полинома 19-й степени использовать два полинома 5-й степени по каждой из координатных осей.

Ключевые слова: аппроксимация, непрерывная функция, узлы аппроксимации, интерполяция, интерполяционная кривая, минимум функции, точечное исчисление, нелинейное пространство, функция Рунге.

1. Введение

Одними из основных инструментов решения задач научной визуализации изображений и визуальной аналитики является интерполяция и аппроксимация. Интерполяция применяется для визуализации полей различного происхождения [1, 2], для быстрой визуализации сцен с помощью 3D-ускорителей [3], для реализации технологий сжатия текстур, используемых в современных персональных компьютерах, планшетах и смартфонах [4], для визуализации результатов параметрических расчетов в задачах вычислительной аэрогазодинамики [5] и др. Аппроксимация традиционно применяется для численного решения дифференциальных уравнений [7, 8, 9]. Кроме того, она получила широкое распространение в инженерной геометрии и компьютерной графике [10], используется для 3D моделированию равновесных капиллярных поверхностей и визуализации различных эффектов, связанных с их устойчивостью или неустойчивостью [11], для обработки результатов параметрических расчетов в задачах вычислительной аэрогазодинамики [5, 12] и других задач.

Среди разнообразия задач многомерной аппроксимации [13, 14], необходимо выделить класс задач, связанных с аппроксимацией непрерывных функций [15, 16]. Такие задачи, как правило решаются на отрезке функций с интерполяцией на равномерных сетках [17]. Выбор равномерных сеток связан с необходимостью определять заранее узлы интерполяции, поскольку они необходимы для определения коэффициентов интерполяционных функций. Вместе с тем, в работах [13, 18] был предложен метод определения интерполяционных кривых в точечном исчислении, который сохранял возможность выбора любых узлов интерполяции. Использование таких интерполяционных кривых открывает новые возможности в аппроксимации непрерывных кривых и позволяет по-новому сформулировать задачу аппроксимации непрерывных функций, связанную с поиском оптимальных узлов аппроксимации путём минимизации целевой функции, которая ранее просто не могла быть поставлена из-за ограниченных возможностей существующих математических аппаратов интерполяции.

2. Метод поиска оптимальных узлов аппроксимации

Метод оптимального поиска узлов аппроксимации основан на использовании интерполяционных кривых, реализованных в точечном исчислении [13, 18]. Основная идея определения таких кривых заключается в том, что вместо конкретных значений полиномиальных коэффициентов используются координатные векторы A_k , которые управляют формой алгебраической кривой:

$$M = \sum_{k=0}^n A_{k+1} t^{n-k},$$

где M – текущая точка дуги кривой;

t – текущий параметр, который изменяется от 0 до 1;

n – количество узлов интерполяции.

Выполним замену координатных векторов A_k на узлы интерполяционной кривой M_k . Для этого примем следующее условие: $M=M_{k+1}$ при равномерном распределении текущего параметра $t=k/n$. Следует учесть, что первый и последний узлы интерполяции уже определены начальной и конечной точкой кривой. Т.е. $A_1=M_1$ при $t=0$, а $A_n=M_n$ при $t=1$. В результате вместо параметра t в каждой точке (узле интерполяции) получим конкретное его значение. Далее составляется система линейных уравнений, которая решается методом Крамера относительно неизвестных координатных векторов A_k , заменяя их на узлы интерполяционной кривой M_k . Определённые таким образом выражения A_k подставляются в исходное точечное уравнение алгебраической кривой. В результате получим точечное уравнение интерполяционной кривой, которая определяется узловыми точками M_k и текущим параметром t :

$$M = \sum_{k=0}^n M_{k+1} \phi_{k+1}(t),$$

где $\phi_{k+1}(t)$ – полиномиальные функции степени n , полученные в результате замены координатных векторов A_k на узлы интерполяционной кривой M_k .

Таким образом в уравнении интерполяционной кривой сохраняется возможность управлением узлами интерполяции M_k . Переходя к системе параметрических уравнений, для двухмерного пространства получим:

$$\begin{cases} x = \sum_{k=0}^n x_{k+1} \phi_{k+1}(t) \\ y = \sum_{k=0}^n y_{k+1} \phi_{k+1}(t) \end{cases},$$

где x_{k+1} и y_{k+1} – координаты узлов интерполяции M_{k+1} .

Полученная система уравнений описывает нелинейное по осям абсцисс и ординат пространство с помощью двух независимых полиномиальных функций.

Теперь имея уравнение кривых сохраняющих координаты узлов интерполяции, можно ставить задачу оптимального расположения узлов интерполяции по оси абсцисс для аппроксимации непрерывных функций. Для этого интерполяционную кривую необходимо дискретизировать – представить в виде дискретного набора точек, количество которых m должно быть больше количества узлов интерполяции n . В результате для двухмерного пространства получим два отдельных массива функций x_i и y_i от узлов интерполяции и текущего параметра с равномерным распределением значений $t_i = i/m$. Таким образом, для каждого конкретного значения t_i получим значения функций x_i и y_i , которые зависят только от узлов интерполяции M_k .

Целевая функция представляет собой сумму квадратов разности координат $\sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2$, где $f(x_i)$ – это аппроксимируемая функция в качестве переменной, для которой используется массив значений, полученный на основе аппроксимирующей функции.

Определив минимум целевой функции, получим значения координат узлов интерполяционной кривой, оптимизированные по оси абсцисс и итоговое уравнение интерполяционной кривой в векторной форме или в виде системы параметрических уравнений.

Фактически, предложенный метод основан на минимизации среднеквадратичного отклонения двух функций. При этом происходит «обучение» аппроксимирующей полиномиальной функции на основе аппроксимируемой. Качество такого «обучения» зависит от количества точек, полученных путём дискретизации интерполяционной кривой. Таким образом, чем выше значение количества дискретизированных точек интерполяционной кривой m , тем выше качество аппроксимации и вместе с тем выше вычислительная нагрузка. Как показали вычислительные эксперименты, эта зависимость не является линейной и даже при небольших значениях m можно получить качественные результаты аппроксимации при низких вычислительных затратах.

3. Результаты проведения вычислительных экспериментов

Для проведения вычислительных экспериментов выбрана функция Рунге, которая определяется на отрезке $[-1,1]$:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

Для аппроксимации функции Рунге используется интерполяционная кривая в нелинейном двумерном пространстве, проходящая через 6 узлов интерполяции M_k , которая определяется следующим точечным уравнением и сводится к системе двух однотипных параметрических уравнений:

$$M = \phi_1 M_1 + \phi_2 M_2 + \phi_3 M_3 + \phi_4 M_4 + \phi_5 M_5 + \phi_6 M_6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 + \phi_4 x_4 + \phi_5 x_5 + \phi_6 x_6 \\ y = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 + \phi_4 y_4 + \phi_5 y_5 + \phi_6 y_6 \end{cases},$$

где x_j и y_j – координаты 6 узлов интерполяции ($j = 1, 2, \dots, 6$);

$$\phi_1 = \bar{t}^5 - \frac{77}{12} \bar{t}^4 t + \frac{269}{24} \bar{t}^3 t^2 - \frac{77}{12} \bar{t}^2 t^3 + \bar{t} t^4;$$

$$\phi_2 = 25 \bar{t}^4 t - \frac{1450}{24} \bar{t}^3 t^2 + \frac{1850}{48} \bar{t}^2 t^3 - \frac{25}{4} \bar{t} t^4;$$

$$\phi_3 = -25 \bar{t}^4 t + \frac{2950}{24} \bar{t}^3 t^2 - \frac{1150}{12} \bar{t}^2 t^3 + \frac{50}{3} \bar{t} t^4;$$

$$\phi_4 = \frac{50}{3} \bar{t}^4 t - \frac{1150}{12} \bar{t}^3 t^2 + \frac{2950}{24} \bar{t}^2 t^3 - 25 \bar{t} t^4;$$

$$\phi_5 = -\frac{25}{4} \bar{t}^4 t + \frac{1850}{48} \bar{t}^3 t^2 - \frac{1450}{24} \bar{t}^2 t^3 + 25 \bar{t} t^4;$$

$$\phi_6 = \bar{t}^4 t - \frac{77}{12} \bar{t}^3 t^2 + \frac{269}{24} \bar{t}^2 t^3 - \frac{77}{12} \bar{t} t^4 + t^5;$$

t – параметр интерполяционной кривой, который изменяется от 0 до 1;

$\bar{t} = 1 - t$ – дополнение параметра t до 1.

Значения $f(x_i)$ вычисляются исходя из исходной функции Рунге:

$$f(x_i) = \frac{1}{1 + 25x_i^2}.$$

Далее составляем и определяем минимум целевой функции: $\sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2$. Для

проведения вычислительных экспериментов значение $m=100$.

Из 6 узлов интерполяции первый и последний уже определены исходя из условий: $x_1 = -1$, $x_6 = 1$. Остаётся вычислить координаты 4 узлов: x_2, x_3, x_4, x_5 , таким образом, чтобы отклонение аппроксимируемой полиномиальной функции от аппроксимирующей было минимальным.

Вычисления производились в системе компьютерной алгебры Maple. Для минимизации целевой функции использовалась команда NLPsolve из пакета Optimization. В результате были определены оптимальные координаты узлов аппроксимации функции Рунге по оси абсцисс:

$$x_2 = -0.233198, x_3 = -0.06054, x_4 = 0.06054, x_5 = 0.233198.$$

Итоговые уравнения аппроксимирующей функции в нелинейном двухмерном пространстве представлены в виде следующей системы параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = -1 + 22.886t^5 - 57.215t^4 + 57.076t^3 - 28.398t^2 + 7.652t \\ y = -9.964 \cdot 10^{-9}t^5 + 15.603t^4 - 31.206t^3 + 15.691t^2 - 0.088t + 0.038 \end{cases}.$$

Как видно из полученной системы уравнений, для аппроксимации функции Рунге было использовано два полинома 5-й степени по каждой из осей координат. Выполним визуальное сравнение графика аппроксимируемой функции Рунге и аппроксимирующей алгебраической кривой 5-го порядка в нелинейном пространстве (рис. 1).

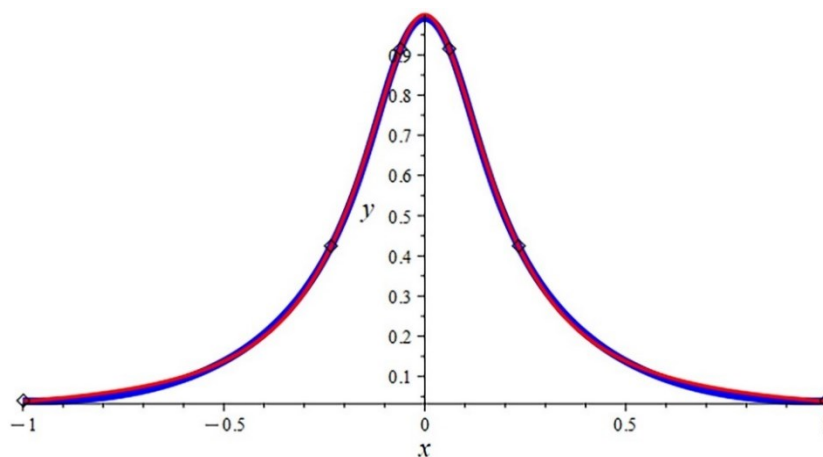


Рис. 1. Визуализация графика функции Рунге (красный), аппроксимированного алгебраической кривой 5-го порядка в нелинейном пространстве (синий)

Для визуального сравнения полученных результатов приведём график функции Рунге, аппроксимированный полиномом Лагранжа с равномерным распределением узлов интерполяции (рис. 2) и с использованием узлов Чебышева (рис. 3), которые считаются оптимальными для аппроксимации функции Рунге. Как видно из сравнения рисунка 1 с рисунками 2 и 3, существующие методы аппроксимации функции Рунге значительно уступают по точности предложенному методу поиска оптимальных узлов аппроксимации.

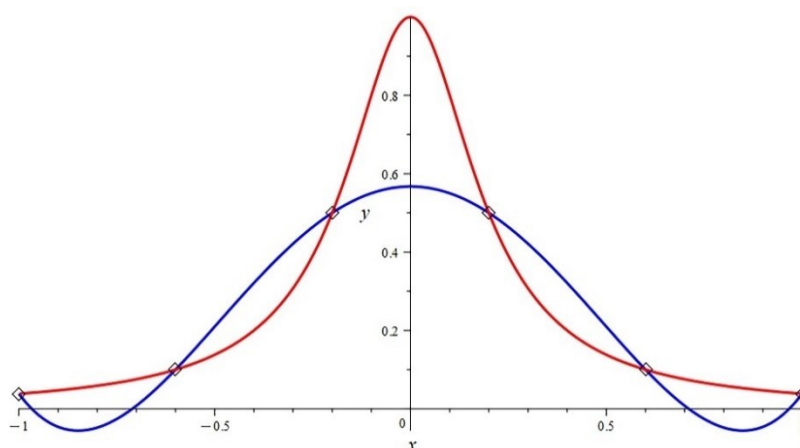


Рис. 2. Визуализация графика функции Рунге (красный), аппроксимированного полиномом Лагранжа с равномерным распределением узлов интерполяции (синий)

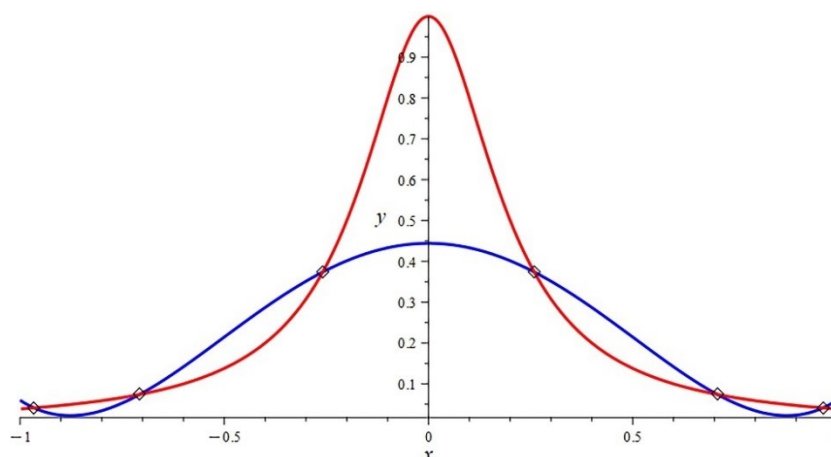


Рис. 3. Визуализация графика функции Рунге (красный), аппроксимированного полиномом Лагранжа с использованием узлов Чебышева (синий)

По результатам расчёта среднеквадратичная ошибка аппроксимации (MSE) составила всего 0.0000284, что подтверждается сравнением графиками функций, представленных на рисунке 1. Для сравнения MSE интерполяционной кривой 5-го порядка, построенной на основе 6 узлов Чебышева, составляет. Для достижения $MSE=0.0000253$ кривой на основе узлов Чебышева, сопоставимой с среднеквадратичной ошибкой на основе метода определения оптимального расположения узлов аппроксимации, необходимо не менее 23 узлов, что приводит к необходимости использования полинома 22 степени и значительно повышает сложность вычислений, требования к округлению полиномиальных коэффициентов и усложняет возможности их практического использования. Столь высокое качество аппроксимации при минимальном значении узловых точек обеспечивается тем, что аппроксимирующая кривая определяется в нелинейном пространстве, сохраняя при этом нелинейность как по оси абсцисс, так и по оси ординат. Это наводит на мысль, что ещё более эффективной аппроксимации можно достичь для пространственных интерполяционных кривых в многомерном пространстве.

Также были проведены вычислительные эксперименты по определению оптимальных узлов аппроксимации для различных интерполантов в виде алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки. В результате мы можем проанализировать тенденцию изменения среднеквадратичной ошибки MSE метода поиска оптимальных узлов аппроксимации непрерывных функций с учётом нелинейности пространства в зависимости от количества узлов аппроксимации (табл. 1).

Таблица 1. Зависимость MSE от количества узлов аппроксимации

Количество узлов	5	6	7	8	9	10	11
MSE	0,000963	2,84E-05	5,14E-07	1,01E-08	8,15E-10	2,67E-08	4E-09

Как видно из таблицы 1, до 9 узлов наблюдается стабильный рост точности аппроксимации и незначительное её снижение при использовании 10 и 11 узлов аппроксимации. Это связано с ограничением использованного численного метода минимизации целевой функции по числу итераций. Несмотря на это значения среднеквадратичной ошибки остаются на уровне 10^{-8} и ниже, что говорит об очень высоком качестве аппроксимации и эффективности предложенного метода.

Сравним предложенный метод с результатами исследований других авторов. В работе [19] реализован особый алгоритм на основе вейвлет-преобразования, обеспечивший квази-интерполяцию функции Рунге методом сингулярных вейвлетов с равномерным расположением узлов интерполяции на промежутке $[-1, 1]$. Для достижения качественного результата понадобилось 13 точек, что также уступает по количеству узлов аппроксимации по сравнению с предложенным методом. В работе [20] для аппроксимации функции Рунге на отрезке $[-1, 1]$ были использованы адаптивные радиальные базисные функции. Для достижения $MSE=0.000017$ сопоставимой по точности с предложенным методом вместо 6 узлов интерполяции понадобилось 47. При этом для точной аппроксимации со среднеквадратичной ошибкой на уровне $2.6E-6$ понадобилось 83 узла.

В работе [21] исследовалась возможность использования нейросетей для аппроксимации функции Рунге на отрезке $[-2.5, 2.5]$. Применим метод поиска оптимальных узлов аппроксимации непрерывных функций с учётом нелинейности пространства для аппроксимации функции Рунге с новыми граничными условиями.

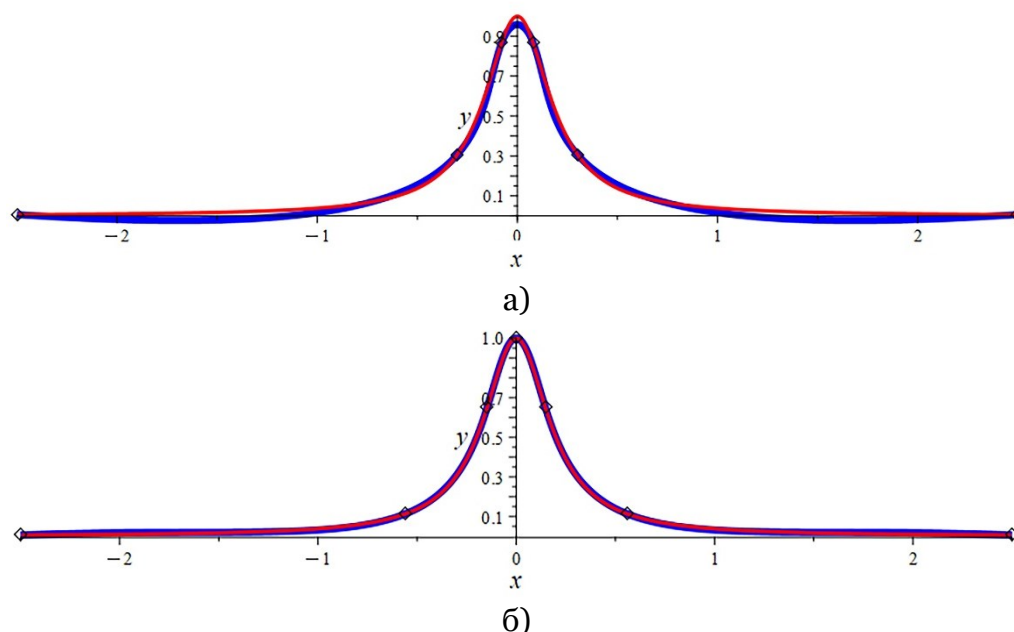


Рис. 4. Визуализация графика функции Рунге (красный) на отрезке $[-2.5, 2.5]$, аппроксимированного алгебраической кривой в нелинейном пространстве (синий):
а) кривая 5-го порядка, проходящая через 6 узлов интерполяции;
б) кривая 6-го порядка, проходящая через 7 узлов интерполяции

При аппроксимации функции Рунге на отрезке $[-2.5, 2.5]$ алгебраической кривой 5-го порядка, проходящая через 6 узлов интерполяции, среднеквадратичная ошибка составила 0.0005587. А при использовании кривой 6-го порядка, проходящей через 7 узлов интерполяции, $MSE=0.00001936$. Как видно из полученных результатов (рис. 4а и 4б), эффективность предложенного метода выше при значительно меньшем количестве узловых точек аппроксимации. В работе [21] для аппроксимации функции Рунге нейронной сетью с 1 нейроном на входном слое, 3 нейронами на скрытом слое и 1 нейроном на выходном слое обученной на 25 эпохах использовалось 500 точек. В то время, как для реализации предложенного метода поиска оптимального расположения узлов аппроксимации в нелинейном пространстве понадобилось всего 6 и 7 узловых точек соответственно (рис. 4а и 4б).

4. Заключение

К преимуществам предложенного метода оптимизации расположения узлов аппроксимации, помимо низких значений среднеквадратичной ошибки, следует отнести то, что метод является устойчивым к увеличению количества узлов. Это объясняется спецификой самого метода, который каждый раз оптимизирует расположение узлов аппроксимации, адаптируясь к аппроксимируемой функции. При этом отсутствует нежелательный эффект осцилляций полиномиальной функции, что подтверждается на примере Рунге. Другим преимуществом является значительное снижение степени аппроксимирующих полиномов по сравнению с другими методами аппроксимации без необходимости использования для аппроксимации кусочных функций.

К недостаткам предложенного метода относится то, что он реализован с использованием численных методов для поиска минимума целевой функции, которые в значительной степени зависят от качества выбора начального приближения. Требуется проведение дополнительных исследований для обеспечения устойчивости предложенного метода к минимизации целевой функции. Вместе с тем, предложенный метод показал высокую устойчивость по отношению к увеличению узлов аппроксимации. Он является в достаточной степени универсальным и может стать эффективным инструментом ап-

проксимации любых непрерывных функций, а также массивов экспериментальных данных любого происхождения.

Поскольку кривая является основным формообразующим инструментом геометрического моделирования, предложенный метод поиска оптимальных узлов аппроксимации непрерывных функций с учётом нелинейности пространства имеет большие перспективы в сторону увеличения количества переменных аппроксимирующей функции для аппроксимации геометрических объектов, процессов и явлений, имеющих сложную геометрическую форму с помощью непрерывных функций без необходимости использования кусочных функций. Такие кривые могут стать эффективным инструментом описания внутренней структуры пространства для моделирования изотропных и анизотропных геометрических тел, как выделенной части пространства [22]. Также перспективу дальнейших исследований составляют поиск эффективных методов минимизации целевой функции многих переменных и проведение вычислительных экспериментов по аппроксимации различных непрерывных и кусочных функций.

5. Благодарности

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 25-21-00003: <https://rscf.ru/project/25-21-00003/>.

Список литературы

1. Боярчук М.А., Журкин И.Г., Непоклонов В.Б. Концепция графического метода отображения гравитационного поля Земли на плоскости. Научная визуализация. 2019. Т. 11. № 1. С. 70-79. DOI 10.26583/sv.11.1.06.
2. Модяев А.Д., Леонова Н.М., Филатов А.С., Шабынин А.А. Методика визуализации полей гамма-излучения в помещении. Научная визуализация. 2014. Т. 6. № 3. С. 87-95.
3. Андреев С., Валиев И. OpenGL визуализация в Inspire2 с качеством метода трассировки лучей. Научная визуализация. 2012. Т. 4. № 3. С. 26-34.
4. Paltashev T., Perminov I. Texture Compression Techniques. Scientific Visualization. 2014. Vol. 6. No. 1. pp. 106-146.
5. Алексеев А.К., Бондарев А.Е., Пятакова Ю.С. О визуализации функций в многомерном пространстве с помощью канонического разложения. Научная визуализация. 2022. Т. 14. № 3. С. 73-91. DOI 10.26583/sv.14.3.06.
6. Алексеев А.К., Бондарев А.Е., Пятакова Ю.С. Об использовании канонического разложения для визуализации результатов параметрических расчетов. Научная визуализация. 2023. Т. 15. № 4. С. 12-23. DOI 10.26583/sv.15.4.02.
7. Толок А.В., Толок Н.Б. Функционально-воксельное моделирование задачи Коши. Научная визуализация. 2024. Т. 16. № 1. С. 105-111. DOI 10.26583/sv.16.1.09.
8. Васильев А.Н., Лазовская Т.В., Тархов Д.А. Аппроксимация функций Бесселя методом построения многослойных решений дифференциальных уравнений. Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2020. Т. 16. № 2. С. 273-284. DOI 10.25559/SITITO.16.202002.273-284.
9. Konopatskiy E.V., Voronova O.S., Shevchuk O.A., Bezditnyi A.A. About one method of numeral decision of differential equalizations in partials using geometric interpolants. CEUR Workshop Proceedings, 2020. Vol. 2763. pp. 213-219. DOI 10.30987/conferencearticle_5fce27708eb353.92843700.
10. Короткий В.А. Незакономерные кривые в инженерной геометрии и компьютерной графике. Научная визуализация. 2022. Т. 14. № 1. С. 1-17. DOI 10.26583/sv.14.1.01.
11. Klyachin A.A., Klyachin V.A., Grigorieva E.G. Visualization of Stability and Calculation of the Shape of the Equilibrium capillary surface. Scientific Visualization. 2016. Vol. 8. No. 2. pp. 37-52.

12. Алексеев А.К., Бондарев А.Е., Пятакова Ю.С. Об использовании канонического разложения для визуализации результатов параметрических расчетов. Научная визуализация. 2023. Т. 15. № 4. С. 12-23. DOI 10.26583/sv.15.4.02.
13. Конопацкий Е.В. Аппроксимация геометрических объектов с помощью дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки. Информационные технологии. 2019. Т. 25. № 1. С. 46-52. DOI 10.17587/it.25.46-51.
14. Konopatskiy E.V., Bezditnyi A.A., Shevchuk O.A. Modeling geometric varieties with given differential characteristics and its application. CEUR Workshop Proceedings, 2020. Vol. 2744. DOI 10.51130/graphicon-2020-2-4-31.
15. Ta Y.T., Ngo H.H., Nguyen V.H. A new computational method for determining parameters representing fundamental frequency contours of speech words. Journal of Information Hiding and Multimedia Signal Processing. 2020. Vol. 11. No. 1. pp. 1-13.
16. Motoki M., Shintani H., Matsuo K., Martin T. McGinnity Utilization of SAM-based network for developing function approximation. Journal of Digital Information Management. 2022. Vol. 20. No. 4. pp. 148-155. DOI 10.6025/jdim/2022/20/4/148-155.
17. Рамазанов А.Р.К., Магомедова В.Г., Ибрагимова Б.М. Рациональная аппроксимация непрерывных функций с интерполяцией на равномерных сетках узлов. Вестник Дагестанского государственного университета. 2012. № 1. С. 106-111.
18. Konopatskiy E.V., Bezdytniy A.A. Modeling and Visualization of Complex Shaped Surfaces Using Interpolation Curves. Scientific Visualization. 2024. Vol. 16. No. 4. pp. 1-10. DOI 10.26583/sv.16.4.01.
19. Романчук В.М. Аппроксимация сингулярными вейвлетами. Системный анализ и прикладная информатика. 2018. № 2. С. 23-28.
20. Zhang Qi., Zhao Ya., Levesley J. Adaptive radial basis function interpolation using an error indicator. Numerical Algorithms. 2017. Vol. 76. No. 2. pp. 441-471. DOI 10.1007/s11075-017-0265-5.
21. Галкин В.А., Гавриленко Т.В., Смородинов А.Д. Некоторые аспекты аппроксимации и интерполяции функций искусственными нейронными сетями. Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2022. Т. 38. № 1. С. 54-73. DOI 10.26117/2079-6641-2022-38-1-54-73.
22. Konopatskiy E.V., Bezditnyi A.A., Lagunova M.V., Naidysh A.V. Principles of solid modelling in point calculus. IoP conference series: Journal of Physics: Conf. Series 1901 (2021) 012063. DOI 10.1088/1742-6596/1901/1/012063.

Method of Searching Optimal Nodes Arrangement of Continuous Function Approximation with Consideration of Space Nonlinearity

E.V. Konopatskiy^{1,A}, D.I. Kislitsyn^{2,A}, A.V. Stepura^{3,B}, O.V. Kotova^{4,C}

^A Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering

^B Moscow State University of Civil Engineering (National Research University)

^C Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture

¹ ORCID: 0000-0003-4798-7458, e.v.konopatskiy@mail.ru

² ORCID: 0000-0002-0232-9593, kislitsynd@yandex.ru

³ ORCID: 0000-0003-4099-329X, stepuraAV@mgsu.ru

⁴ ORCID: 0009-0004-6292-1080, o.v.kotova@donnasa.ru

Abstract

A method of searching optimal nodes of approximation realized on the example of Runge function is proposed. The method is based on the use of interpolation algebraic curves in point calculus and is reduced to minimization of the target function of many variables, which provides minimum deviations of the approximating function from the original one. Traditionally, in the process of interpolation, the coefficients of the interpolating function are determined on the basis of the initial points, which does not make it possible to ensure the search for the optimal location of interpolation nodes, since the coordinates of the node points are necessary to determine the coefficients of the interpolating function. The peculiarity of interpolation curves realized in point calculation is that they are obtained by uniform distribution of the parameter along the numerical axis and keep the coordinates of interpolation nodes in the point equation, which makes it possible to set and solve the problem of their optimal location by minimizing the target function. After the realization of the coordinate calculation of the point equation of the interpolation curve, the final result of the approximation of the original function is an algebraic curve given in parametric form, which allows us to use the nonlinearity of space to significantly reduce the degree of the approximating polynomial function. For example, when using Chebyshev nodes, which are considered optimal for approximating the Runge function, at least 20 nodes are needed to achieve a high-quality approximation, which leads to the need to use a polynomial of degree 19. In this case, the MSE is 0.000111. Whereas for the Runge function approximation based on the optimized arrangement of approximation nodes, even when using 6 node points, the MSE is only 0.0000284, which is an order of magnitude lower compared to Chebyshev nodes and allows using two polynomials of degree 5 on each of the coordinate axes instead of one polynomial of degree 19.

Keywords: approximation, continuous function, approximation nodes, interpolation, interpolation curve, minimum of function, point calculus, nonlinear space, Runge function.

References

1. Boyarchuk M.A., Zhurkin I.G., Nepoklonov V.B. Concept of a visualization method for Earth's gravity field on plain maps. Scientific Visualization. 2019. Vol. 11. No. 1. pp. 70-79. DOI [10.26583/sv.11.1.06](https://doi.org/10.26583/sv.11.1.06).
2. Modyaev A.D., Leonova N.M., Filatov A.S., Shabynin A.A. Methodology of gamma-rays visualization in indoor space. Scientific Visualization. 2014. Vol. 6. No. 3. pp. 87-95.

3. Andreev S., Valiev I. OpenGL visualization in Inspire2 with quality of ray tracing method. *Scientific Visualization*. 2012. Vol. 4. No. 3. pp. 26-34.
4. Paltashev T., Perminov I. Texture Compression Techniques. *Scientific Visualization*. 2014. Vol. 6. No. 1. pp. 106-146.
5. Alekseev A.K., Bondarev A.E., Pyatakova Yu.S. On the Visualization of Multidimensional Functions using Canonical Decomposition. *Scientific Visualization*. 2022. Vol. 14. No. 3. pp. 73-91. DOI: 10.26583/sv.14.3.06
6. Alekseev A.K., Bondarev A.E., Pyatakova Yu.S. On Application of Canonical Decomposition for the Visualization of Results of Multiparameter Computations. *Scientific Visualization*. 2023. Vol. 15. No. 4. pp. 12-23. DOI 10.26583/sv.15.4.02.
7. Tolok A.V., Tolok N.B. Functional-Voxel Modeling of The Cauchy Problem. *Scientific Visualization*. 2024. Vol. 16. No. 1. pp. 105-111. DOI 10.26583/sv.16.1.09.
8. Vasilyev A.N., Lazovskaya T.V., Tarkhov D.A. Approximation of Bessel functions by the method of constructing multilayer solutions of differential equations. *Modern information technologies and IT education*. 2020. Vol. 16. No. 2. pp. 273-284. DOI 10.25559/SITITO.16.202002.273-284.
9. Konopatskiy E.V., Voronova O.S., Shevchuk O.A., Bezditnyi A.A. About one method of numeral decision of differential equalizations in partials using geometric interpolants. *CEUR Workshop Proceedings*, 2020. Vol. 2763. pp. 213-219. DOI 10.30987/conferencearticle_5fce27708eb353.92843700.
10. Korotkiy V.A. Irregular Curves in Engineering Geometry and Computer Graphics. *Scientific Visualization*. 2022. Vol. 14. No. 1. pp. 1-17. DOI 10.26583/sv.14.1.01.
11. Klyachin A.A., Klyachin V.A., Grigorieva E.G. Visualization of Stability and Calculation of the Shape of the Equilibrium capillary surface. *Scientific Visualization*. 2016. Vol. 8. No. 2. pp. 37-52.
12. 6. Alekseev A.K., Bondarev A.E., Pyatakova Yu.S. On Application of Canonical Decomposition for the Visualization of Results of Multiparameter Computations. *Scientific Visualization*. 2023. Vol. 15. No. 4. pp. 12-23. DOI 10.26583/sv.15.4.02.
13. Konopatskiy E.V. Approximation of geometric objects using arcs of curves passing through to advance given points. *Information technologies*. 2019. VOL. 25. No. 1. pp. 46-52. DOI 10.17587/it.25.46-51.
14. Konopatskiy E.V., Bezditnyi A.A., Shevchuk O.A. Modeling geometric varieties with given differential characteristics and its application. *CEUR Workshop Proceedings*, 2020. Vol. 2744. DOI 10.51130/graphicon-2020-2-4-31.
15. Ta Y.T., Ngo H.H., Nguyen V.H. A new computational method for determining parameters representing fundamental frequency contours of speech words. *Journal of Information Hiding and Multimedia Signal Processing*. 2020. Vol. 11. No. 1. pp. 1-13.
16. Motoki M., Shintani H., Matsuo K., Martin T. MCGinnity Utilization of SAM-based network for developing function approximation. *Journal of Digital Information Management*. 2022. Vol. 20. No. 4. pp. 148-155. DOI 10.6025/jdim/2022/20/4/148-155.
17. Ramazanov A.R.K., Magomedova V.G., Ibragimova B.M. Rational approximation of continuous functions with interpolation on uniform node grids. *Bulletin of Dagestan State University*. 2012. No. 1. pp. 106-111.
18. Konopatskiy E.V., Bezdytniy A.A. Modeling and Visualization of Complex Shaped Surfaces Using Interpolation Curves. *Scientific Visualization*. 2024. Vol. 16. No. 4. pp. 1-10. DOI 10.26583/sv.16.4.01.
19. Romanchak V.M. Approximation by singular wavelets. *System analysis and applied informatics*. 2018. No. 2. pp. 23-28.
20. Zhang Qi., Zhao Ya., Levesley J. Adaptive radial basis function interpolation using an error indicator. *Numerical Algorithms*. 2017. Vol. 76. No. 2. pp. 441-471. DOI 10.1007/s11075-017-0265-5.

21. Galkin V.A., Gavrilenko T.V., Smorodinov A.D. Some aspects of approximation and interpolation of functions artificial neural networks. Bulletin KRAUNTS. Physical and Mathematical Sciences. 2022. Vol. 38. No. 1. pp. 54-73. DOI 10.26117/2079-6641-2022-38-1-54-73.
22. Konopatskiy E.V., Bezditnyi A.A., Lagunova M.V., Naidysh A.V. Principles of solid modelling in point calculus. IoP conference series: Journal of Physics: Conf. Series 1901 (2021) 012063. DOI 10.1088/1742-6596/1901/1/012063.